

Messwerte und ihre Fehler

Grundlagen der Fehlerrechnung mit Kurzanleitung in die computergestützte Datenauswertung

März 2016

Herausgeber: Institut für Physikalische Chemie

Inhaltsverzeichnis

1	Systematische Fehler	2
2	Fehler aufgrund begrenzter Präzision bei der Erfassung der Daten	3
3	Zufällige oder statistische Fehler	4
4	Fehlerfortpflanzung	5
5	Angabe der Ergebnisse und ihrer Fehler	6
6	Kurzeinführung in ORIGIN 9.1	7
7	Ausgleichsrechnung	16
7.1	Mathematischer Hintergrund	16
7.2	Lösung „per Auge und Hand“	18

1 Systematische Fehler

Systematische Fehler können auf verschiedene Weise entstehen:

1. Durch falsch kalibrierte, schlecht gewartete oder defekte Messgeräte.
2. Durch ungeeignete oder falsch angewandte Messverfahren

Beispiel: Es soll in einem elektrochemischen Experiment die EMK gemessen werden. Das Spannungsmessgerät hat aber einen zu kleinen Innenwiderstand. Als Folge davon erhält man für die EMK betragsmäßig zu kleine Werte (die EMK muss grundsätzlich stromlos gemessen werden).

3. Zu grobe Näherungsverfahren.

Beispiel: Es soll die Temperatur mit einem Thermoelement bestimmt werden. Die gemessene Spannung steht in einem nahezu linearen Zusammenhang mit der Temperatur. Verlässt man sich auf diesen linearen Zusammenhang, können Messfehler von einigen Kelvin auftreten (siehe Abb. 1). Abhilfe: für die Bestimmung der Temperatur mit einem Thermoelement müssen die Tabellen der Hersteller verwendet werden oder man verwendet für die Anpassung ein höheres Polynom.

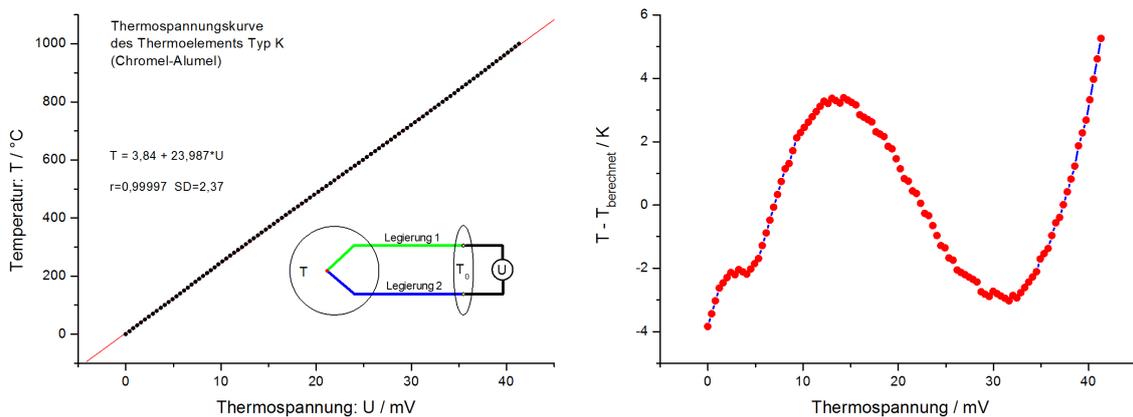


Abbildung 1: Links: Temperatur-Thermospannungs-Kennlinie eines Thermoelements (Typ K), die rote Linie ist eine scheinbar perfekte lineare Anpassung. Rechts: Unterschied zwischen wahrer Temperatur und nach linearer Regression berechneter Temperatur (Residuum). Der Temperaturfehler beträgt bis zu 6 K!

Achtung: Systematische Fehler sind häufig schwer zu erkennen. Sie führen immer zu Messwertabweichungen in eine Richtung (zu hoch oder zu tief). Sie können nur abgeschätzt werden und im besten Fall kompensiert werden, wenn man ihre Ursache kennt. Folgende Maßnahmen können zu ihrer Vermeidung ergriffen werden:

1. Durchdenken des Messverfahrens
2. Pflege, Wartung, Kontrolle und Kalibrierung der Messgeräte
3. Kritische Beurteilung der Daten
4. Prüfen der Ergebnisse auf Konsistenz

2 Fehler aufgrund begrenzter Präzision bei der Erfassung der Daten

Beispiele:

1. Volumenmessung:

Zur Bestimmung und Festlegung des Volumens stehen verschiedene Geräte zur Verfügung: Eimer mit Literteilung, Bechergläser mit grober Milliliterteilung, Standzylinder mit etwas feinerer Milliliterteilung, Büretten, Pipetten und Mess- oder Maßkolben. Die beiden letzten Volumenmessgeräte sind durch ein Nennvolumen gekennzeichnet. Meist ist neben dem Nennvolumen der Fehler des Volumens angegeben, der typischerweise bei der Verwendung der Pipette oder des Maßkolbens auftritt.

2. Messung der Masse:

Im Laborbereich sind im Allgemeinen die Fein- und Analysenwaagen vertreten. Bei den Waagen ist der Messbereich und die erreichbare Wägegenauigkeit zu beachten. Feinwaagen können einige 100 g mit einer Auflösung bis zu 1 mg messen. Analysenwaagen arbeiten in einem Bereich von einigen 10 g mit einer Auflösung bis zu 0,01 mg.

3. Messung der Spannung:

Ein Digitalmultimeter kann Gleichspannungen beispielsweise mit einer maximalen Ablesegenauigkeit von $10 \mu\text{V}$ messen. Falls die Spannungsmessung zur Bestimmung der Temperatur mit einem Thermoelement (z. B. Chromel-Alumel, alias NiCr-Ni, alias Thermoelement Typ K) dient, kann die Temperatur bestenfalls mit einer Genauigkeit von 0,25 K bestimmt werden.

4. Weitere Beispiele können Sie sich denken.

Abhilfe: Überlegen Sie vor dem Versuch, welche Genauigkeitsanforderungen Sie an die Messung haben und wählen Sie das geeignete Messgerät aus.

3 Zufällige oder statistische Fehler

Selbst bei Ausschluss von systematischen Fehlern und bei Verwendung optimal geeigneter Messgeräte kann die Messung ein und desselben Zustands zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, wenn man mehrere Messungen durchführt. Man spricht dann von statistischen Fehlern. Diese Fehler können beurteilt, quantifiziert und minimiert werden.

Mittelwert

Wenn die Messung einer physikalischen Größe x mehrfach wiederholt wird, werden die Messwerte x_i gewöhnlich voneinander abweichen. Diese Streuung der Messwerte könnte etwa durch Wahl eines besseren Messverfahrens oder eines genaueren Messgerätes verkleinert werden. In jedem Fall jedoch wird die Messung fehlerbehaftet bleiben, so dass der „wahre“ Wert x_w der gesuchten Größe grundsätzlich unzugänglich bleibt.

Bei einer zufälligen (oder *statistischen*) Verteilung der Messwerte um den wahren Wert ist der beste Wert, den man nach n -facher Wiederholung der Messung angeben kann, der Mittelwert \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Standardabweichung und Fehler des Mittelwerts

Mit Hilfe der statistischen Fehlertheorie lassen sich aus der Streuung der Messwerte Aussagen über die Genauigkeit der Messung treffen. Ein Maß für die Streuung ist die mittlere quadratische Abweichung der Messwerte x_i vom Mittelwert \bar{x} , auch *Standardabweichung* s genannt:

$$s = + \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{mit } n > 1 \quad (2)$$

Die Standardabweichung beschreibt die Genauigkeit der Einzelmessung und kann somit zur Charakterisierung des Messverfahrens herangezogen werden. Sie ist im Prinzip unabhängig von der Zahl der Messungen (Summanden kompensieren den Faktor n^{-1}). Unter der Annahme, dass sich die Messwerte nach einer Gaußfunktion verteilen (sog. Normalverteilung), lässt sich folgende Aussage ableiten: Die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert innerhalb des Intervalls $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$ (oder anders ausgedrückt: $\bar{x} \pm s$) zu finden, beträgt 68,3%. Für $\bar{x} \pm 2s$ und $\bar{x} \pm 3s$ erhält man 95,4% bzw. 99,7%.

Die Genauigkeit des Mittelwertes hängt hingegen von der Anzahl der durchgeführten Messungen ab. Zur Beurteilung des Fehlers des Mittelwertes (und damit des Messergebnisses!) wird der sog. *Statistische Fehler des Mittelwertes* Δx verwendet:

$$\Delta x = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

Bemerkung: Der Fehler des Mittelwertes ist umgekehrt proportional zu n , d. h. die Genauigkeit des Endergebnisses lässt sich durch Erhöhung der Anzahl der durchgeführten Messungen etwa von $n = 1$ auf $n = 4$ bzw. $n = 16$ verdoppeln bzw. vervierfachen. Allerdings wird darüber hinaus eine Verbesserung der Messgenauigkeit mühsam, da die Anzahl der Messungen deutlich erhöht werden müsste.

4 Fehlerfortpflanzung

In den meisten Fällen ist die gesuchte Größe (mit z bezeichnet) über einen (aus theoretischen Überlegungen bekannten) Zusammenhang mit den direkt gemessenen Größen (mit $a, b, c \dots$ bezeichnet) verknüpft: $z = f(a, b, c \dots)$. Für die direkten Messgrößen lassen sich (systematische und/oder statistische) Messfehler angeben: $\Delta a, \Delta b, \Delta c \dots$. Wie pflanzen sich nun diese Fehler in die gesuchte Größe z fort?

Die Fehlertheorie liefert hierfür das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz (für die Herleitung muss auf die Literatur verwiesen werden):

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2 + \dots} \quad (4)$$

In der Praxis wird gelegentlich die sogenannte *Größtfehlerabschätzung* benutzt, da für sie der Rechenaufwand etwas geringer ist. Ihr liegt eine Linearisierung der Funktion f zugrunde:

$$\Delta z_{max} = \left|\frac{\partial z}{\partial a}\right| |\Delta a| + \left|\frac{\partial z}{\partial b}\right| |\Delta b| + \left|\frac{\partial z}{\partial c}\right| |\Delta c| + \dots \quad (5)$$

Diese Abschätzung liefert Fehler, die größer sind als die nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechneten.

Für die praktische Anwendung besonders wichtig sind folgende Spezialfälle:

1. $z = Ka - b$: $K = \text{const.}$ Dann ist:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = K \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial z}{\partial b} = -1$$

Die Größtfehlerabschätzung liefert: $\Delta z = |K|\Delta a + \Delta b$

Es gilt demnach:

Bei Summen und Differenzen addieren sich die *absoluten* Fehler der Summanden

2. $z = Ka^m b^{-n}$: Dann ist:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = K m a^{m-1} b^{-n} = \frac{mz}{a} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial z}{\partial b} = K a^m (-n) b^{-n-1} = \frac{-nz}{b}$$

Die Größtfehlerabschätzung ergibt:

$$\Delta z = \left| \frac{mz}{a} \right| \Delta a + \left| \frac{-nz}{b} \right| \Delta b \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta z}{z} = \left| m \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| n \frac{\Delta b}{b} \right|$$

Es gilt demnach:

Bei Produkten und Quotienten addieren sich die *relativen* Fehler der Faktoren

5 Angabe der Ergebnisse und ihrer Fehler

An das Ende des Protokolls gehört eine *Ergebniszusammenfassung!* Hier sollen die Endergebnisse zusammen mit den absoluten und/oder relativen Fehlern angegeben werden. Bei rein statistischen Fehlern also:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad \text{bzw.} \quad x = \bar{x} \pm \frac{\Delta x}{x} 100\%$$

Man muss sich darüber im Klaren sein, dass alle Fehlerangaben Wahrscheinlichkeitsausagen (s. Abschnitt 2!) und damit selbst fehlerbehaftet sind. Daher folgende Regel:

Fehler (relative und absolute) werden nur mit einer gültigen Dezimale angegeben, ist diese eine Eins, wird noch die zweite Dezimale berücksichtigt (siehe Beispiel). Das Messergebnis wird entsprechend so gerundet, dass die letzte angegebene Stelle der gültigen Stelle des Fehlers entspricht.

Rundungsbeispiele

1. Vorläufiges Ergebnis: $x = 6,137 \pm 0,084$; Runden des Fehlers: $\Delta x = 0,08$; gerundetes Ergebnis mit Fehlerangabe: $x = 6,14 \pm 0,08$
2. $x = 6321,9 \pm 654 \quad \rightarrow \quad \Delta x = 700 \quad \rightarrow \quad x = 6300 \pm 700$
3. $x = 45,198 \pm 1,04 \quad \rightarrow \quad \Delta x = 1,0 \quad \rightarrow \quad x = 45,2 \pm 1,0$

Berücksichtigung der Einheiten

Zur vollständigen Angabe einer Physikalischen Größe G sind drei Komponenten erforderlich: der Zahlenwert der Größe mit dem Fehler $\{G \pm \Delta G\}$ multipliziert mit der Einheit der Größe $[G]$: $G = \{G \pm \Delta G\} \cdot [G]$. Beispiel: Standardverdampfungsenthalpie von Wasser $\Delta_{vap}H^\ominus$

$$\begin{aligned}
\{\Delta_{vap}H^{\ominus}\} &= 40,7 \\
[\Delta_{vap}H^{\ominus}] &= \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \\
\Delta_{vap}H^{\ominus} &= \{\Delta_{vap}H^{\ominus}\} \cdot [\Delta_{vap}H^{\ominus}] \\
&= 40,7 \cdot \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \\
\frac{\Delta_{vap}H^{\ominus}}{\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}} &= 40,7
\end{aligned}
\tag{6}$$

Es ist deshalb logisch, wenn man für die Beschriftung von Achsen eines Diagramms oder für einen Tabellenkopf die physikalische Größe **geteilt** durch die Einheit angibt. Nicht logisch, aber erlaubt ist die Angabe der Einheit in eckigen Klammern: physikalische Größe [Einheit]

6 Kurzeinführung in ORIGIN 9.1

Auf vielfachen Wunsch im Rahmen der Praktikumsevaluierung folgt hier eine Kurzanleitung zur Bedienung des Datenauswerteprogramms mit dem schönen Namen „Origin“. Dieses kommerzielle Programmpaket steht Ihnen im Rechnerpool, Raum 406, des Praktikums zur Verfügung (evtl. auch in neueren Programmversionen). Hier soll kurz gezeigt werden wie man damit Daten darstellen kann und wie eine lineare Kurvenanpassung funktioniert. Im Anhang von Versuch A42 können Sie sich über eine nichtlineare Kurvenanpassung (im Laborjargon „Fit“) informieren. Selbstverständlich können Sie die Daten auch mit anderen Programmen (z. B. Excel oder GnuPlot) darstellen und bearbeiten. Auch die klassische Variante mit Millimeterpapier und Lineal ist erlaubt.

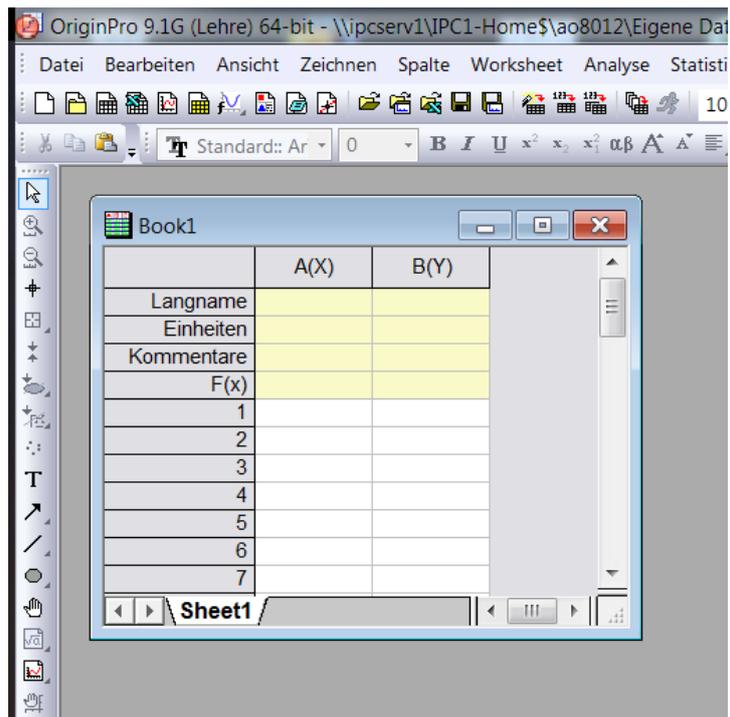


Abbildung 2: Nach dem Start von Origin erscheint eine leere Wertetabelle, „Book1“ genannt. Sie hat standardmäßig die Spalten A(X) und B(Y). A und B sind die Spaltennamen und X bzw. Y sind die Spaltentypen: x-Achse bzw. y-Achse.

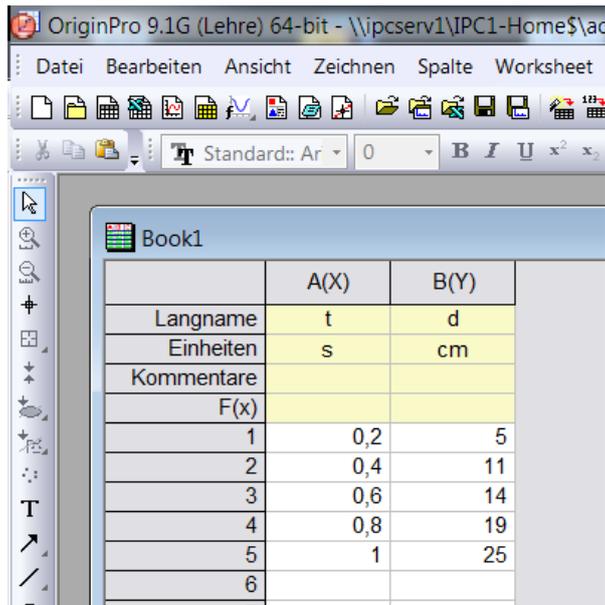


Abbildung 3: Unter Langname kann man einen eigenen selbsterklärenden Spaltennamen eingeben (hier t für Zeit und d für Weg), darunter die Einheit (s bzw. cm). In den Zeilen 1 bis 5 wurden Werte eingetragen. Man kann sie auch einlesen lassen (siehe unter Datei/Import) oder direkt aus einer Excel-Tabelle kopieren

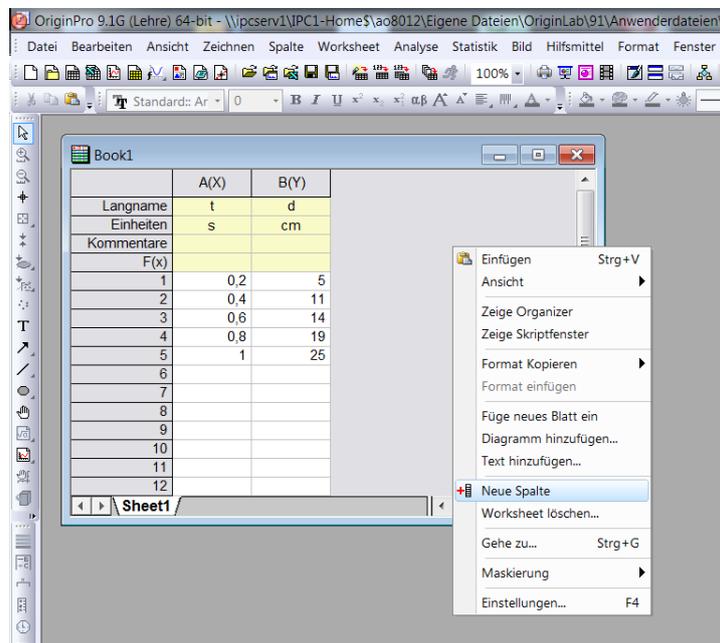


Abbildung 4: Drückt man die rechte Maustaste auf dem grauen Feld neben den Spalten geht ein Fenster auf. „Neue Spalte“ erzeugt eine solche: C(Y)

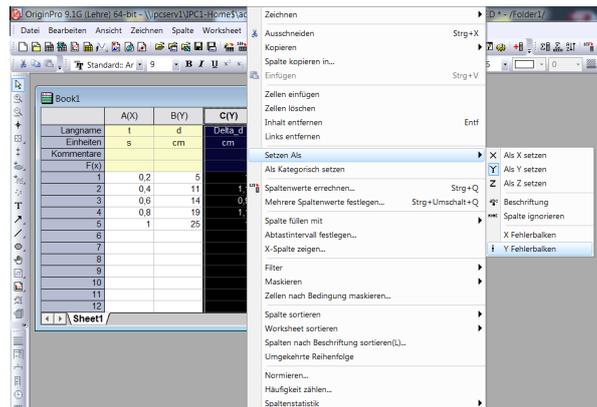


Abbildung 5: Diese Spalte soll die Fehler der Messwerte enthalten. Dazu müssen die Fehlerwerte eingetragen werden und die Spalte als y-Fehlerspalte gesetzt werden: linke Maustaste auf den Spaltenkopf markiert die Spalte, dann rechte Maustaste auf den Spaltenkopf. Es öffnet ein Menü. Über „Setzen als“, dann „Y-Fehlerbalken“ anklicken.

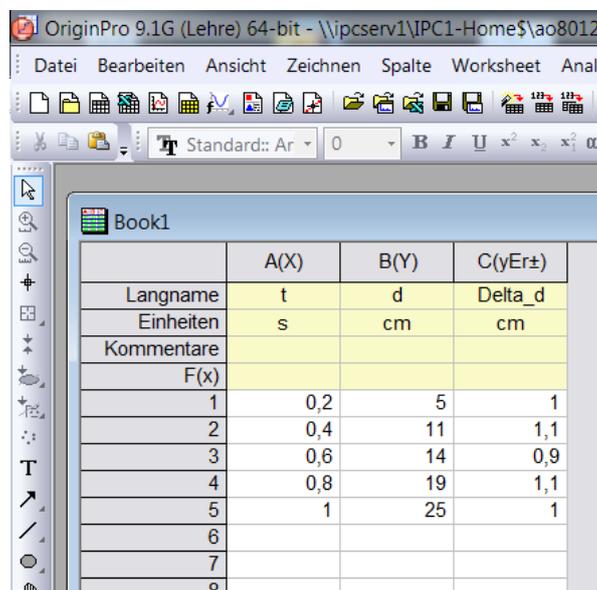


Abbildung 6: Man erhält dieses Ergebnis: Spalte C ist jetzt C(yEr±). Die Daten sollen nun in einem Punktdiagramm mit Fehlerbalken dargestellt werden

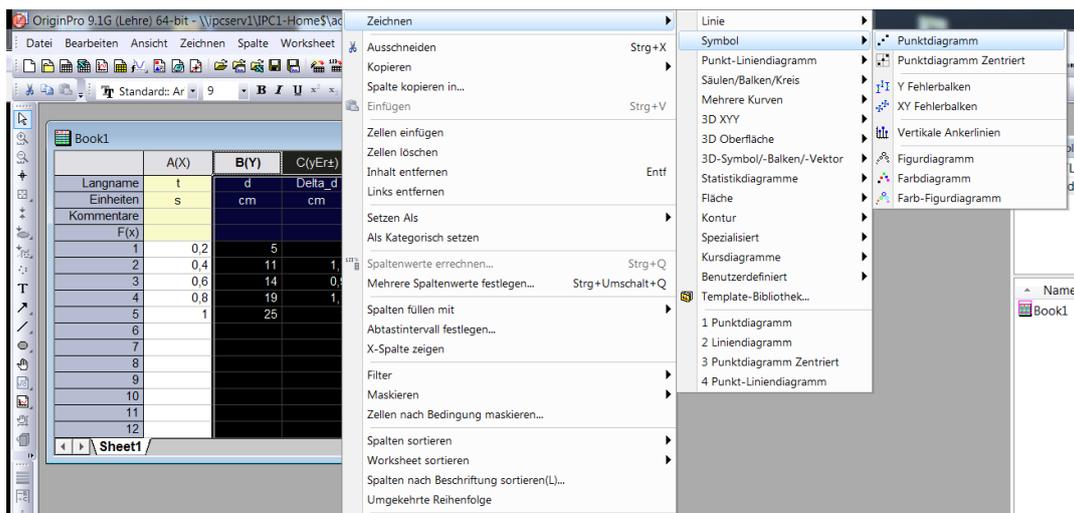


Abbildung 7: Man zieht mit der linken Maustaste über die Spaltenköpfe von B und C, beide Spalten sind nun markiert und schwarz unterlegt. Die rechte Maustaste über dem Spaltenkopf öffnet wieder ein Fenster. Man folgt über „Zeichnen“, „Symbol“ und klickt das Punktdiagramm an.

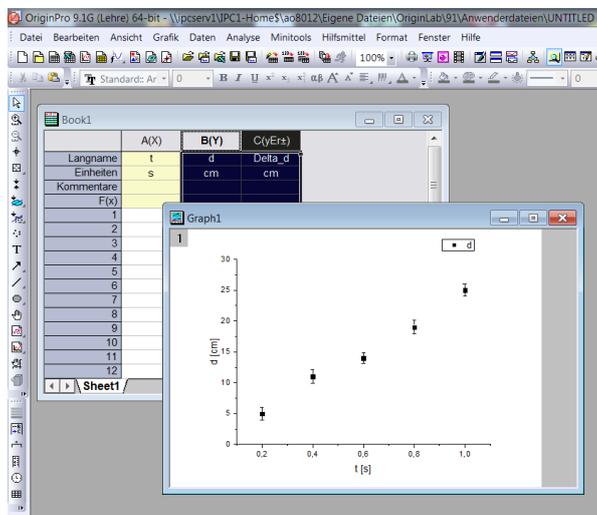


Abbildung 8: Man erhält dieses Ergebnis. Jedes Element auf diesem Plot (Datenpunkte, Fehlerbalken, Achsen, Achsteilung, Achsbeschriftung) kann durch Doppelklick mit der linken Maustaste direkt auf das Element bearbeitet werden. Es öffnet sich jeweils ein kontextbezogenes Menü, in dem die Veränderungen vorgenommen werden können

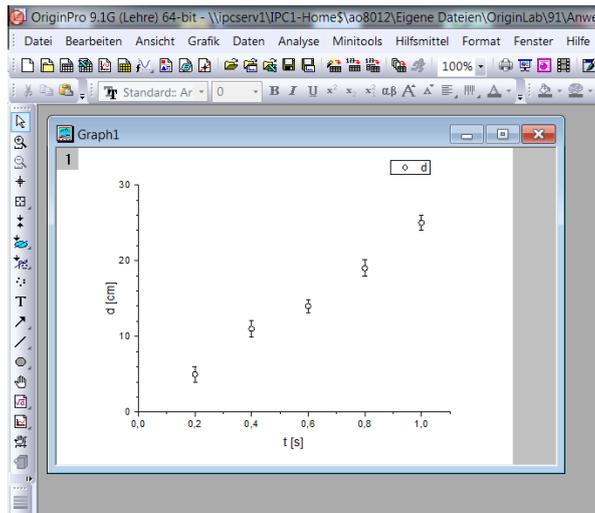


Abbildung 9: Das Ergebnis sieht dann vielleicht so aus. Die Achsen beginnen jetzt bei Null, die Achsteilung wurde angepasst, das Punktsymbol wurde abgeändert. Es soll nun eine Gerade durch die Punkte gezeichnet werden

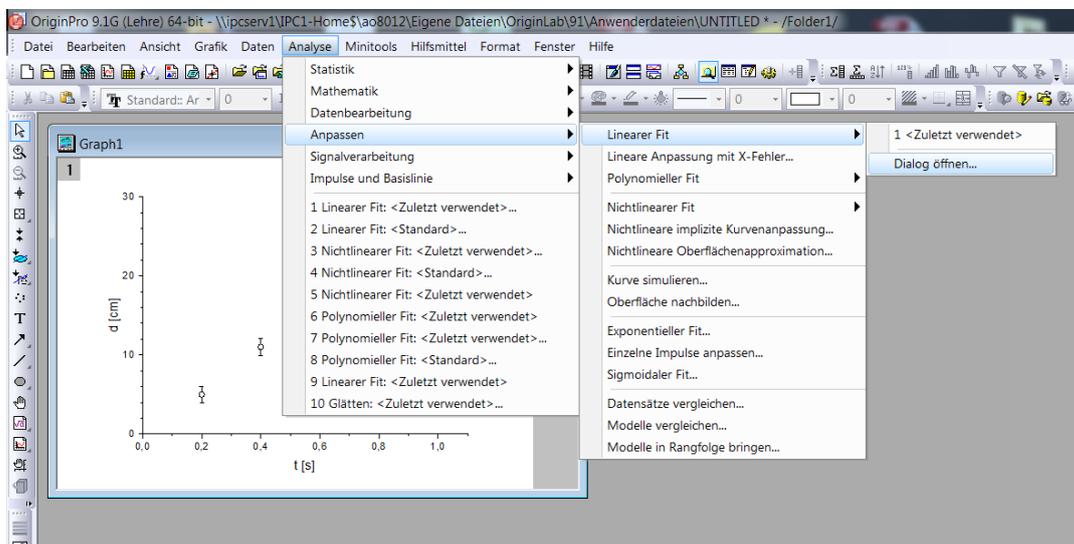


Abbildung 10: Dazu wählt man aus dem Hauptmenü „Analyse“ und folgt den ausfliegenden Fenstern über „Anpassen“, „Linearer Fit“ und klickt „Dialog öffnen“ an.

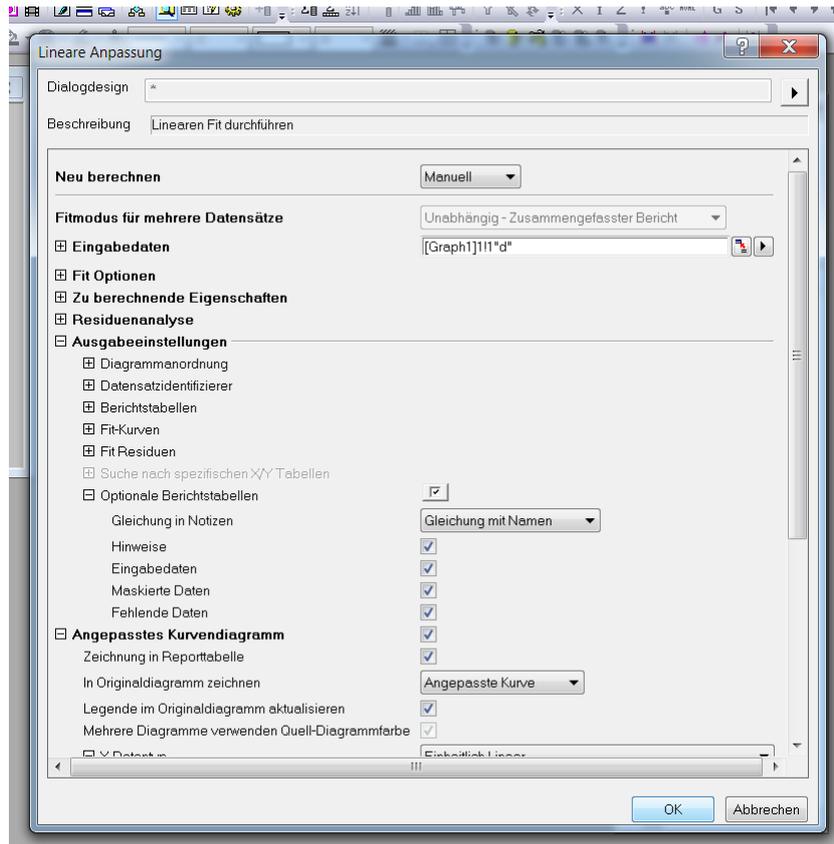


Abbildung 11: Hier kann man alles mögliche einstellen. Meist muss man an der Standardeinstellung nichts ändern und man drückt auf „OK“.

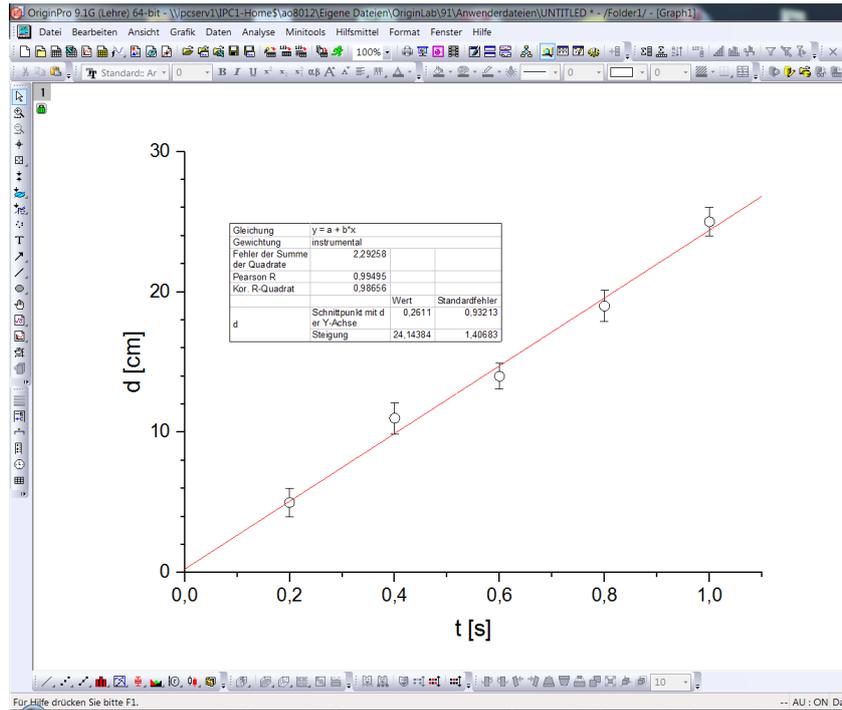


Abbildung 12: Im Diagramm erscheint eine Ausgleichsgerade und eine Tabelle mit ersten Informationen zu der linearen Regression

The figure shows a spreadsheet view of the data in OriginPro 9.1G. The spreadsheet has the following structure:

	A(X)	B(Y)	C(yErz)
Langname	t	d	Delta_d
Einheiten	s	cm	cm
Kommentare			
F(x)			
1	0,2	5	1
2	0,4	11	1,1
3	0,6	14	0,9
4	0,8	19	1,1
5	1	25	1
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			

Abbildung 13: Wenn man das Arbeitsbuch („Book1“) durch Anklicken wieder aktiviert, sieht man, dass darin weitere Arbeitsblätter entstanden sind, z. B. „Lineare Anpassung of Sheet1“

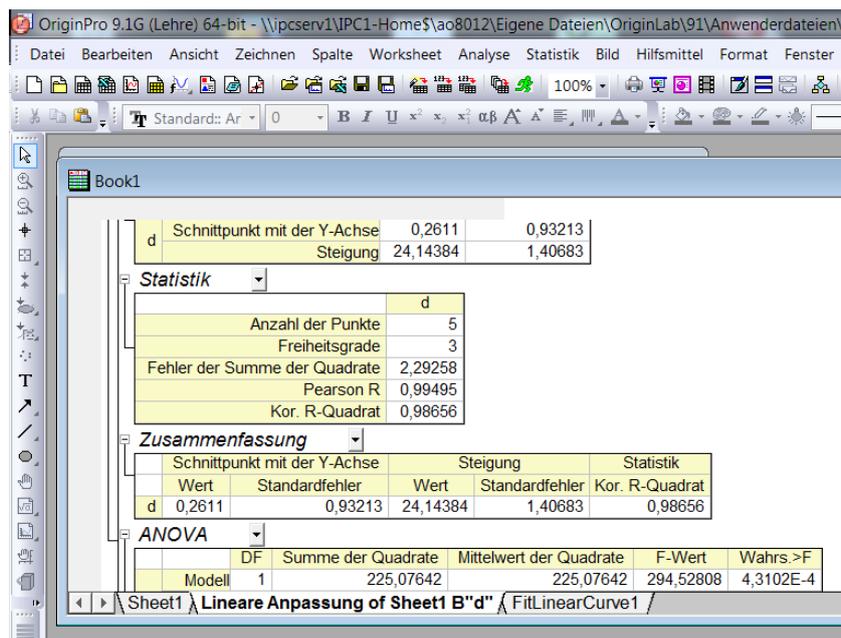


Abbildung 14: Darin findet man unter „Zusammenfassung“ die für die meisten Fälle wichtigsten Angaben, nämlich den Achsenabschnitt (d_0) und die Steigung (m) mit ihren jeweiligen Fehlern. Man würde sie im Protokoll so angeben: $d_0 = 0,3 \pm 0,9 \text{ cm}$ und $m = \frac{dd}{dt} = 24,1 \pm 1,4 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

7 Ausgleichsrechnung

7.1 Mathematischer Hintergrund

In einer früheren Version dieser Handreichung gab es den Abschnitt über Origin 9.1 noch nicht. Insofern ist dieser Abschnitt *Ausgleichsrechnung* nicht mehr Pflicht sondern Kür. Für Interessierte soll im Folgenden aber gezeigt werden, was mathematisch hinter der linearen und polynomiellen Kurvenanpassung steckt. Die hier vorgestellten Gleichungen sind in den einschlägigen Programmpaketen implementiert.

Bei der graphischen Darstellung der Abhängigkeit der Größe y von der Variablen x ergibt sich häufig eine Punktfolge (y_i, x_i) , deren Punkte aufgrund der Messfehler um die Sollkurve streuen. Man muss also eine Ausgleichskurve finden. Eine Möglichkeit besteht in der Anwendung der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate (least mean square fit). Betrachtet wird dabei die Abweichung zwischen den Messwerten y_i bei gegebenen x -Werten x_i von den durch einen funktionalen Zusammenhang berechneten Werten $y(x_i)$ bei den gleichen Werten x_i . $y(x_i)$ ist ein analytischer Ausdruck für den Zusammenhang zwischen y und x . Dieser wurde entweder aufgrund einer Theorie aufgestellt oder um die Punktfolge zweckmäßig zu parametrisieren. Diese Methode fordert, dass die Summe Q der Abweichungsquadrate zum Minimum wird:

$$Q = \sum_{i=1}^N (y_i - y(x_i))^2 = \text{Min} \quad (7)$$

Betrachtet man einen Ausgleichspolynom 2. Grades:

$$y(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2, \quad (8)$$

so erhält man für das Minimum drei Bedingungen, nämlich

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0; \quad (j = 0, 1, 2). \quad (9)$$

Angewandt auf Gleichung (8) erhält man folgende Ableitungen:

$$\frac{\partial y}{\partial a_0} = 1; \quad \frac{\partial y}{\partial a_1} = x; \quad \frac{\partial y}{\partial a_2} = x^2 \quad .$$

Aus (7) und (8) folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i) \cdot 1 = 0 = \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i) \cdot x_i = 0 = \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot x_i \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_2} &= \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i) \cdot x_i^2 = 0 = \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot x_i^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Mit der Gaußschen Abkürzung für die Summen: $[x] = \sum_{i=1}^N (x_i)$ usw. erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} Na_0 + [x]a_1 + [x^2]a_2 &= [y] \\ [x]a_0 + [x^2]a_1 + [x^3]a_2 &= [xy] \\ [x^2]a_0 + [x^3]a_1 + [x^4]a_2 &= [x^2y] \end{aligned} \quad (11)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten a_j des Ausgleichspolynoms muss dieses Gleichungssystem gelöst werden. Aus Gleichung (11) kann man die Gesetzmäßigkeit zur Aufstellung eines Gleichungssystems für Polynome höherer Ordnung herleiten. Im Folgenden soll sich aber auf den wichtigen Sonderfall des Polynoms erster Ordnung beschränkt werden, nämlich die Anpassung mit einer Ausgleichsgeraden:

$$y(x) = a + bx \quad (12)$$

Das lineare Gleichungssystem (11) lautet hierfür:

$$\begin{aligned} Na_0 + [x]b &= [y] \\ [x]a + [x^2]b &= [xy] \end{aligned} \quad (13)$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind gegeben durch

$$a = \frac{D_a}{D} \quad \text{und} \quad b = \frac{D_b}{D} \quad (14)$$

mit den drei Determinanten:

$$D_a = \begin{vmatrix} [x] & [y] \\ [x^2] & [xy] \end{vmatrix} \quad D_b = \begin{vmatrix} N & [y] \\ [x] & [xy] \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} N & [x] \\ [x] & [x^2] \end{vmatrix}$$

Für die Fehlerquadratsumme gilt:

$$Q = [yy] - a[y] - b[xy] \quad (15)$$

Die Standardabweichung der Einzelmessung ist damit gegeben durch:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{Q}{N-2}} \quad (16)$$

Besonders wichtig sind die folgenden Größen: Die Standardabweichung des Achsenabschnitts a berechnet sich zu

$$\sigma_a = \sigma_m \sqrt{\frac{[x^2]}{D}} \quad (17)$$

und die Standardabweichung der Steigung b beträgt

$$\sigma_b = \sigma_m \sqrt{\frac{N}{D}} \quad (18)$$

7.2 Lösung „per Auge und Hand“

Eine lineare Ausgleichskurve durch einen Satz von fehlerbehafteten Messpunkten kann – wie früher üblich – auch per Auge durch ein handgezeichnetes Diagramm erfolgen. Das ist schematisch in der Abbildung 15 gezeigt. Die durchgezogene Kurve ist eine per Auge und Lineal festgelegte Ausgleichsgerade, aus der Steigung und Achsenabschnitt ermittelt werden können. Die gestrichelten Linien stellen Grenzfälle der Ausgleichsgeraden dar, die gerade noch durch die Streuung der Daten und durch deren Fehlerbalken gedeckt sind. Aus ihnen können die Minimal- und Maximalwerte der Steigung und des Y-Achsenabschnitts ermittelt werden. Diese Vorgehensweise ist neben der exakten mathematischen Lösung und der Verwendung eines Computerprogramms in den Physikalisch-Chemischen Praktika ausdrücklich erlaubt!

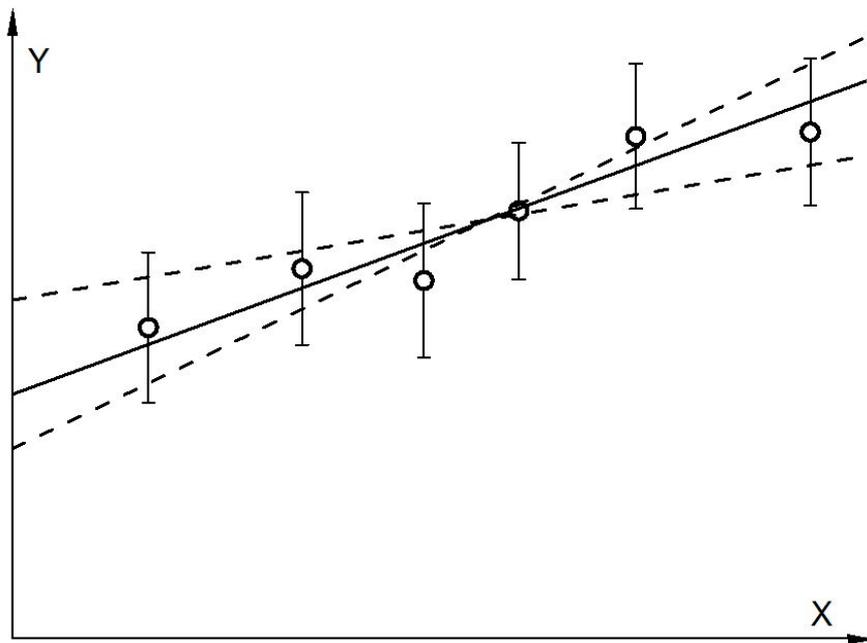


Abbildung 15: Ausgleichsgerade per Auge und Lineal