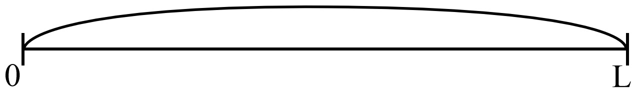
Einführung in die Physikalische Chemie, Mathematische Methoden (B)
SS 14

Blatt 7

Aufgabe 23

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 660Hz$$

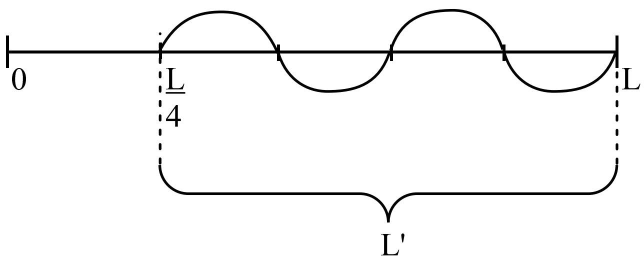


allgemein gilt:

$$\omega = \frac{\pi \cdot v}{L}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2L} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{L}{L'}$$

In unserem Fall:



$$L' = \frac{3}{4}L$$

$$\frac{\nu_1'}{\nu_1} = \frac{L}{L'} = \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \nu_1' = 880Hz$$

Mit $n = 4$ $\qquad \Rightarrow \qquad \nu_4' = 4 \cdot \nu_1' = 3520Hz$

Aufgabe 24

a)
Normierungsbedingung klassische Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \overset{!}{=} 1$$

$$\int_0^1 cx^2(1-x)dx = \int_0^1 \left(cx^2 - cx^3\right)dx = \left[\frac{c}{3}x^3 - \frac{c}{4}x^4\right]_0^1 = \left(\frac{c}{3}\cdot 1 - \frac{c}{4}\cdot 1 - 0\right) = \frac{c}{12} \overset{!}{=} 1$$

$\Rightarrow \qquad c = 12$

b)
Normierungsbedingung quantenmechanische Wellenfunktion:

$$\int_0^{2\pi} \Psi^* \cdot \Psi \; d\varphi \overset{!}{=} 1$$

$$\int_0^{2\pi} \Psi^* \cdot \Psi \; d\varphi = \int_0^{2\pi} N \cdot \exp(-im\varphi) \cdot N \cdot \exp(im\varphi)\; d\varphi = \int_0^{2\pi} N^2 \cdot \exp(-im\varphi + im\varphi)\; d\varphi$$

$$= \int_0^{2\varphi} N^2 d\varphi = N^2 [\varphi]_0^{2\pi} = N^2 \cdot 2\pi \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \qquad N = \pm\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

Aufgabe 25

a)

$$\hat{A}\sigma = \frac{d}{dx}\cos(bx) = -b \cdot \sin(bx)$$

$$\hat{B}\sigma = \frac{d^2}{dx^2}\cos(bx) = \frac{d}{dx}(-b \cdot \sin(bx)) = -b^2 \cdot \cos(bx)$$

b)

$$\hat{A}\eta = \frac{d}{dx}\exp(ikx) = ik \cdot \exp(ikx)$$

$$\hat{B}\eta = \frac{d^2}{dx^2}\exp(ikx) = i^2 k^2 \cdot \exp(ikx) = -k^2 \cdot \exp(ikx)$$

$$\hat{C}\eta = \left(\frac{d^2}{dx^2} + 2k^2\right) \cdot \eta = \frac{d^2}{dx^2}\eta + 2k^2 \cdot \eta$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\exp(ikx) + 2k^2 \cdot \exp(ikx) = -k^2 \cdot \exp(ikx) + 2k^2 \cdot \exp(ikx) = k^2 \cdot \exp(ikx)$$

Aufgabe 26

$$\hat{A} = \frac{d}{dx}$$

$$\hat{A}^2 f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{A}^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\hat{A} = \frac{d}{dx} + x$$

$$\hat{A}^2 f(x) = \left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\left(\frac{d}{dx} + x\right) f(x)\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} f(x) + x \cdot f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) + x \cdot \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx}(x \cdot f(x)) + x^2 \cdot f(x)$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} f(x) + x \cdot \frac{d}{dx} f(x) + x \cdot \frac{d}{dx} f(x) + f(x) + x^2 \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{A}^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 1 + x^2$$

Aufgabe 27

a) $\hat{A} f(x) = \frac{d^2}{dx^2}(\cos(x)) = -\cos(x) = -f(x)$

Somit gilt: f ist Eigenfunktion zum Operator $\hat{A}$ mit Eigenwert -1.

b) $\widehat{P}_x f(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}(\exp(ikx)) = \hbar k \exp(ikx) = \hbar k f(x)$

Somit gilt: f ist Eigenfunktion zum Operator Impulsoperator $\widehat{P}_x$ mit Eigenwert $\hbar k$.

c) $\nabla^2 f(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\left(\cos(ax)\right)\left(\cos(by)\right)\left(\cos(cz)\right)\right)$

$= -a^2 \cos(ax)\left(\left(\cos(by)\right)\left(\cos(cz)\right)\right) - b^2 \cos(by)\left(\left(\cos(ax)\right)\left(\cos(cz)\right)\right) - c^2 \cos(cz)\left(\left(\cos(ax)\right)\left(\cos(by)\right)\right)$

$= \left(-a^2 - b^2 - c^2\right) \cdot \left(\left(\cos(ax)\right)\left(\cos(by)\right)\left(\cos(cz)\right)\right)$

$= \left(-a^2 - b^2 - c^2\right) f(x,y,z)$

Somit gilt: f ist Eigenfunktion zum Laplace-Operator ∇^2 mit Eigenwert $-a^2 - b^2 - c^2$.

Alle Lösungen ohne Gewähr!!!