

Einführung in die Physikalische Chemie, Mathematische Methoden (B) SS 14

Lösungen Blatt 4

Aufgabe 14

Mittelwert: $\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 V_i = 20,75 \text{ ml}$

Standardabweichung der Einzelwerte:

$$s(V) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (V_i - \bar{V})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^7 (V_i - 20,75 \text{ ml})^2}{6}}$$

NR:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 (V_i - 20,75 \text{ ml})^2 &= \left((20,71 - 20,75)^2 + (21,08 - 20,75)^2 + (20,57 - 20,75)^2 + (20,66 - 20,75)^2 \right. \\ &\quad \left. + (20,49 - 20,75)^2 + (21,01 - 20,75)^2 + (20,70 - 20,75)^2 \right) \text{ ml}^2 \\ &= 0,2887 \text{ ml}^2 \end{aligned}$$

$$s(V) = \sqrt{\frac{0,2887 \text{ ml}^2}{6}} = 0,219 \text{ ml}$$

Standardabweichung des Mittelwerts:

$$s(\bar{V}) = \frac{s(V)}{\sqrt{N}} = \frac{0,219 \text{ ml}}{\sqrt{7}} = 0,0829 \text{ ml}$$

Vertrauensintervall von 95 % $\rightarrow \bar{V} \pm 2s(\bar{V})$

Ergebnis: $V = (20,75 \pm 0,17) \text{ ml}$

Aufgabe 15

$$FQS = \sum_{j=1}^N (x_j - \langle x \rangle)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial FQS}{\partial \langle x \rangle} &= -2 \sum_{j=1}^N (x_j - \langle x \rangle) = -2 [(x_1 - \langle x \rangle) + (x_2 - \langle x \rangle) + \dots + (x_N - \langle x \rangle)] \\ &= -2 [x_1 + x_2 + \dots + x_N - N \cdot \langle x \rangle] = \left(-2 \sum_{j=1}^N x_j \right) + 2N \langle x \rangle \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$$

$$\frac{\partial^2 FQS}{\partial \langle x \rangle^2} = 2N \quad 2N > 0 \Rightarrow \text{Minimum!}$$

Aufgabe 16

$$U = 1V \quad \Delta U = 0,1V$$

$$I = 1A \quad \Delta I = 0,1A$$

$$U = R I$$

$$R = \frac{U}{I}$$

maximaler Fehler:

$$\Delta R_{\max} = \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right| \cdot \Delta I + \left| \frac{\partial R}{\partial U} \right| \cdot \Delta U = \left| \frac{-U}{I^2} \right| \cdot \Delta I + \left| \frac{1}{I} \right| \cdot \Delta U = \left| \frac{1V}{(1A)^2} \right| \cdot 0,1A + \left| \frac{1}{1A} \right| \cdot 0,1V = 0,2\Omega$$

relativer (maximaler) Fehler:

$$\frac{\Delta R_{\max}}{R} \cdot 100\% = 20\%$$

mittlerer Fehler:

$$\Delta R_{\text{mittel}} = \sqrt{\left(\left| \frac{\partial R}{\partial I} \right| \cdot \Delta I \right)^2 + \left(\left| \frac{\partial R}{\partial U} \right| \cdot \Delta U \right)^2} = \sqrt{(0,1\Omega)^2 + (0,1\Omega)^2} = 0,141\Omega$$

relativer (mittlerer) Fehler:

$$\frac{\Delta R_{\text{mittel}}}{R} \cdot 100\% = 14,1\%$$

Aufgabe 17

$$M = \frac{m \cdot R \cdot T}{P \cdot v} = \frac{137 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 8,3144 \frac{\text{J}}{\text{molK}} \cdot 298 \text{ K}}{9,799 \cdot 10^4 \text{ Pa} \cdot 210 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3} = 0,01649 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

Hier mittelbare Messung $\Rightarrow$ Fehlerfortpflanzung!

$$\begin{aligned} \Delta M_{\max} &= \left| \frac{\partial M}{\partial m} \right| \cdot \Delta m + \left| \frac{\partial M}{\partial P} \right| \cdot \Delta P + \left| \frac{\partial M}{\partial v} \right| \cdot \Delta v + \left| \frac{\partial M}{\partial T} \right| \cdot \Delta T \\ &= \frac{RT}{Pv} \cdot \Delta m + \frac{mRT}{P^2 v} \cdot \Delta P + \frac{mRT}{Pv^2} \cdot \Delta v + \frac{mR}{Pv} \cdot \Delta T \\ &= (2,41 \cdot 10^{-4} + 2,24 \cdot 10^{-5} + 1,57 \cdot 10^{-4} + 5,5 \cdot 10^{-5}) \frac{\text{kg}}{\text{mol}} = 0,48 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \end{aligned}$$

$$\text{Ergebnis: } M = (16,5 \pm 0,5) \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Literaturwert (<http://webbook.nist.gov/chemistry>, 16.05.2007): $M = 16,04 \text{ g/mol}$
 $\Rightarrow$ gute Übereinstimmung, da Literaturwert innerhalb des Fehlerintervalls liegt!

Alle Lösungen ohne Gewähr!!!