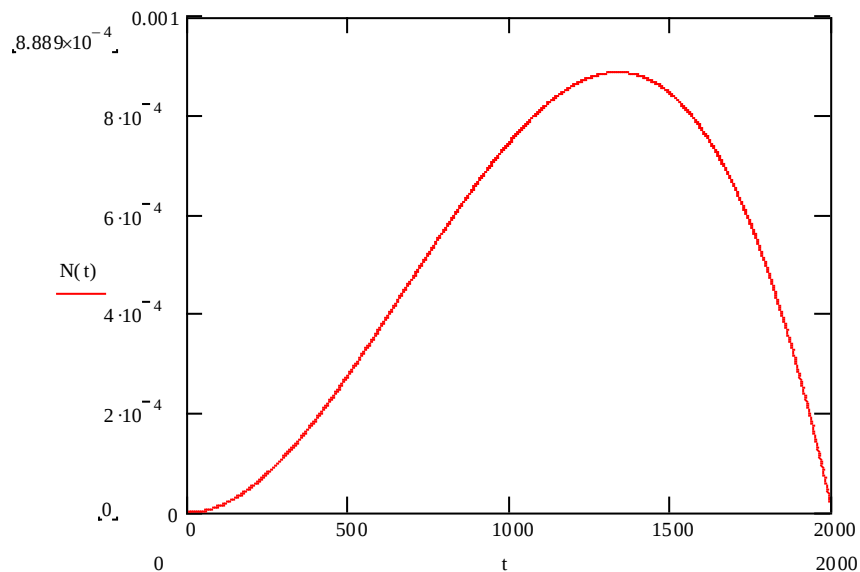


Einführung in die Physikalische Chemie, Mathematische Methoden (B) SS 14

Blatt 3

Aufgabe 10

a)



b)

$$\begin{aligned}\langle t \rangle &= \int_{0h}^{2000h} t \cdot N(t) dt = N \cdot \int_{0h}^{2000h} t^3 (a - t) dt = N \left[\int_{0h}^{2000h} at^3 dt - \int_{0h}^{2000h} t^4 dt \right] = N \left[\frac{1}{4} at^4 \Big|_{0h}^{2000h} - \frac{1}{5} t^5 \Big|_{0h}^{2000h} \right] \\ &= 7.5 \cdot 10^{-13} h^{-4} (8 \cdot 10^{15} h^5 - 6.4 \cdot 10^{15} h^5) = 1200 h\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \int_{0h}^{2000h} bt^2 \cdot N(t) dt = \int_{0h}^{2000h} bt^2 \cdot Nt^2 (a - t) dt = bN \left(\int_{0h}^{2000h} t^4 a dt - \int_{0h}^{2000h} t^5 dt \right) \\ &= bN \left[\frac{1}{5} at^5 \Big|_{0h}^{2000h} - \frac{1}{6} t^6 \Big|_{0h}^{2000h} \right] = Nb \left(\frac{1}{5} (2000h)^5 - \frac{1}{6} (2000h)^6 \right) = 1,6 \text{ €}\end{aligned}$$

Eine Million Glühlampen bringen also einen Umsatz von 1,6 Millionen Euro.

d)

$$P(\langle t \rangle) = b \cdot (1200h)^2 = 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{€}}{h^2} \cdot (1200h)^2 = 1,44 \text{ €}$$

Eine Million Glühlampen bringen also einen Umsatz von 1,44 Millionen Euro.

Es lohnt sich somit nicht, den Preis für eine Lampe mittlerer Lebensdauer als Pauschalpreis zu verlangen.

e)

P sei $b_{\text{linear}} \cdot t$

$$P(\langle t \rangle) = b_{\text{linear}} \cdot \langle t \rangle$$

$$\langle P \rangle = \int_0^{2000h} b_{\text{linear}} \cdot t \cdot N(t) dt = b_{\text{linear}} \cdot \int_0^{2000h} t \cdot N(t) dt = b_{\text{linear}} \cdot \langle t \rangle$$

Für den Spezialfall einer linearen Abhängigkeit des Preises von der Leuchtdauer fallen die auf die verschiedenen Arten ermittelten Preise zusammen.

Aufgabe 11

Poisson-Verteilung für $\lambda = 3$: $f_{\lambda=3}(x) = \frac{3^x}{x!} \exp(-3)$

Durch Einsetzen ergeben sich folgende Werte:

$$f(x=0) = 0,050$$

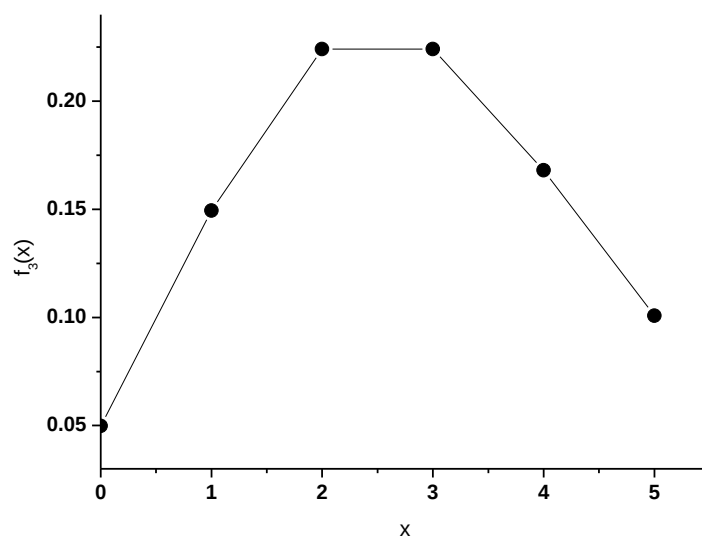
$$f(x=1) = 0,149$$

$$f(x=2) = 0,224$$

$$f(x=3) = 0,224$$

$$f(x=4) = 0,168$$

$$f(x=5) = 0,101$$



$$P(x < 3) = f(0) + f(1) + f(2) = 0,423$$

$$P(x > 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - P(x < 3) - P(x = 3) = 0,353$$

Aufgabe 12

Binomialverteilung: $f_{n,p}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ mit: $p = 0,5$ und $n = 4$ bzw. 8

a)

3 von 4 Spielen:
$$f(x=3) = \binom{4}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^1 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^1 = \frac{1}{4}$$

5 von 8 Spielen:
$$f(x=5) = \binom{8}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^3 = 0,22$$

Es ist wahrscheinlicher 3 von 4 Spielen zu gewinnen

b)

mindestens 3 von 4 Spielen:
$$f(x=3) + f(x=4) = 0,25 + 0,0625 = 0,313$$

mindestens 5 von 8 Spielen:
$$f(x=5) + f(x=6) + f(x=7) + f(x=8) = 0,219 + 0,109 + 0,031 + 0,004 = 0,363$$

Es ist wahrscheinlicher mindestens 5 von 8 Spielen zu gewinnen.

Aufgabe 13

Allgemeine Formulierung:
$$\int_{-\infty}^{x_{1/2}} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Spezieller Fall:
$$\int_{-\infty}^{x_{1/2}} f(x) dx = \int_0^{x_{1/2}} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_0^{x_{1/2}} = \sin\left(x_{1/2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Alle Lösungen ohne Gewähr!!!