

Einführung in die Physikalische Chemie, Mathematische Methoden (B) SS 14

Lösungen Blatt 2

Aufgabe 5

a) Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{e^x + e^{-x}} dx = c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2 \cosh(x)} dx = \frac{c}{2} \cdot 2 \cdot \arctan(e^x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = c \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = c \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{es gilt: } \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x \text{ und } \int \frac{1}{\cosh(ax)} dx = \frac{2}{a} \cdot \arctan(e^{ax})$$

b)

$$\int_{-\infty}^1 \frac{c}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{c}{2} \cdot 2 \cdot \arctan(e^x) \Big|_{-\infty}^1 = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(e^x) \Big|_{-\infty}^1 = \frac{2}{\pi} (\arctan(e) - \arctan(0)) = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(e) \\ \approx 0,776$$

$$\int_0^2 \frac{c}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{c}{2} \cdot 2 \cdot \arctan(e^x) \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(e^x) \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi} (\arctan(e^2) - \arctan(1)) = \frac{2}{\pi} \cdot (1,43 - \frac{\pi}{4}) \\ \approx 0,41$$

Aufgabe 6

$$D^2(x) = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx, \quad D^2(x) > 0$$

$$\begin{aligned}
D^2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2) f(x) dx \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx}_{\langle x^2 \rangle} - 2\langle x \rangle \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}_{\langle x \rangle} + \langle x \rangle^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_1 \\
&= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 > 0
\end{aligned}$$

$$\text{aus } \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 > 0: \langle x^2 \rangle > \langle x \rangle^2 \Rightarrow \langle x^2 \rangle^{1/2} > \langle x \rangle$$

Aufgabe 7

Erwartungswert:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$\text{Substitution: } x - \mu = u \quad \rightarrow \quad x = \mu + u$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \rightarrow \quad dx = du$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u + \mu) \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du}_{\substack{\text{ungerade Funktion} \\ \Rightarrow \text{Integral von } -\infty \text{ bis} \\ \infty = 0}} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du}_{\text{gerade Funktion}} \right\}$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} 2\mu \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du = \frac{2\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}} = \mu$$

$$\text{allgemein gilt: } \int_0^{\infty} \exp(-a^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad \text{hier: } a = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$D^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Substitution: $z = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \rightarrow x-\mu = \sqrt{2}\sigma z$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \rightarrow dx = \sqrt{2}\sigma dz$$

$$D^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2\sigma^2 z^2 \cdot \exp(-z^2) \sqrt{2}\sigma dz = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot \exp(-z^2) dz = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} 2 \cdot \int_0^{\infty} z^2 \cdot \exp(-z^2) dz$$

allgemein gilt: $\int_0^{\infty} x^2 \exp(-a^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$ hier: $a = 1$

$$\Rightarrow D^2 = \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \sigma^2$$

Aufgabe 8

Durchmesser der Kugeln sollen zwischen 19,5 mm (entspricht $\mu-\sigma$) und 22 mm (entspricht $\mu+4\sigma$) liegen.

$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+4\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Substitution: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma} \rightarrow dx = \sigma \cdot dz$$

Grenzen umrechnen:

$$x_u = \mu - \sigma \rightarrow z_u = \frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} = -1$$

$$x_o = \mu + 4\sigma \rightarrow z_o = \frac{\mu + 4\sigma - \mu}{\sigma} = 4$$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^4 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \sigma \, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-1}^0 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + \int_0^4 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^1 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + \int_0^4 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right\} \\
&= 0,34134 + 0,499968 = 0,841308
\end{aligned}$$

Anmerkung: $\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$ ist eine gerade Funktion, deshalb ist

$$\int_{-1}^0 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \int_0^1 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Eine Kugel genügt mit einer Wahrscheinlichkeit von 84,1% den Qualitätsansprüchen.

b)

Ein Durchmesser von 18,5 mm entspricht $\mu - 3\sigma$

$$P(x < \mu - 3\sigma) = 1 - P(x \geq \mu - 3\sigma)$$

$$P(x \geq \mu - 3\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-3\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$\text{Substitution: } z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma} \quad \rightarrow \quad dx = \sigma \cdot dz$$

Grenzen umrechnen:

$$x_u = \mu - 3\sigma \quad \rightarrow \quad z_u = \frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma} = -3$$

$$x_o = \infty \quad \rightarrow \quad z_o = \infty$$

$$\begin{aligned}
P(x \geq \mu - 3\sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \sigma \, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-3}^0 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^3 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right\}
\end{aligned}$$

allgemein: $\int_0^{\infty} \exp(-a^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ hier: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$P(x \geq \mu - 3\sigma) = 0,49865 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = 0,49865 + 0,5 = 0,99865$$

$$\Rightarrow P(x < \mu - 3\sigma) = 1 - P(x \geq \mu - 3\sigma) = 1 - 0,99865 = 0,00135$$

Die Wahrscheinlichkeit (p) eine Kugel mit einem Durchmesser $< 18,5$ mm zu finden ist damit sehr klein.

Man entnimmt der Produktion 1000 Kugeln; die Anzahl der "Versuche" ist sehr groß.

$\Rightarrow$ Poisson-Verteilung (als Grenzfall der Binomialverteilung) mit dem Parameter $\lambda = Np$.

$$\lambda = 1000 \cdot 0,00135 = 1,35$$

$\rightarrow$ Poisson-Verteilung: $P(x) = \frac{1,35^x}{x!} \exp(-1,35)$

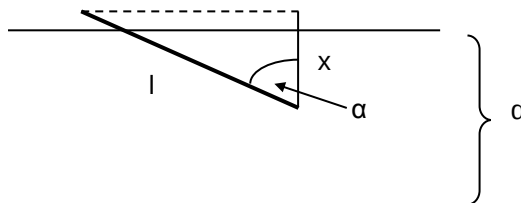
x: Anzahl der Kugeln mit $\varnothing < 18,5$ mm

Hier soll $x = 2$ sein:

$$P(2) = \frac{1,35^2}{2!} \exp(-1,35) = 0,236$$

Man findet also mit einer Wahrscheinlichkeit von 23,6 % unter 1000 Kugeln genau zwei mit $\varnothing < 18,5$ mm.

Aufgabe 9



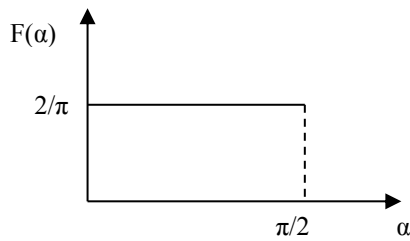
Nadellänge: l
 Linienabstand: d
 Effektivlänge: $x: x = l \cdot \cos \alpha$

Wahrscheinlichkeit, dass Linie geschnitten bzw. berührt wird:

$$P = \frac{\langle x \rangle}{d} \quad \text{mit} \quad \langle x \rangle = l \cdot \langle \cos \alpha \rangle$$

Winkel α : $0 \leq \alpha \leq \pi/2$

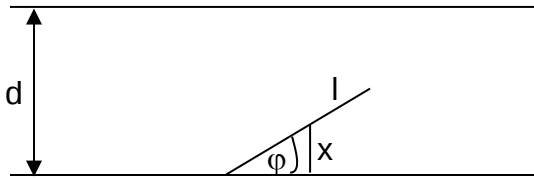
Winkel sind gleichverteilt (kein bestimmter Winkel wird bevorzugt) $\Rightarrow f(\alpha) = \frac{2}{\pi}$



$$\langle \cos \alpha \rangle = \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \cdot f(\alpha) d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi} [\sin \alpha]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 \right) = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \frac{2l}{\pi} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\langle x \rangle}{d} = \frac{2l}{\pi d}$$

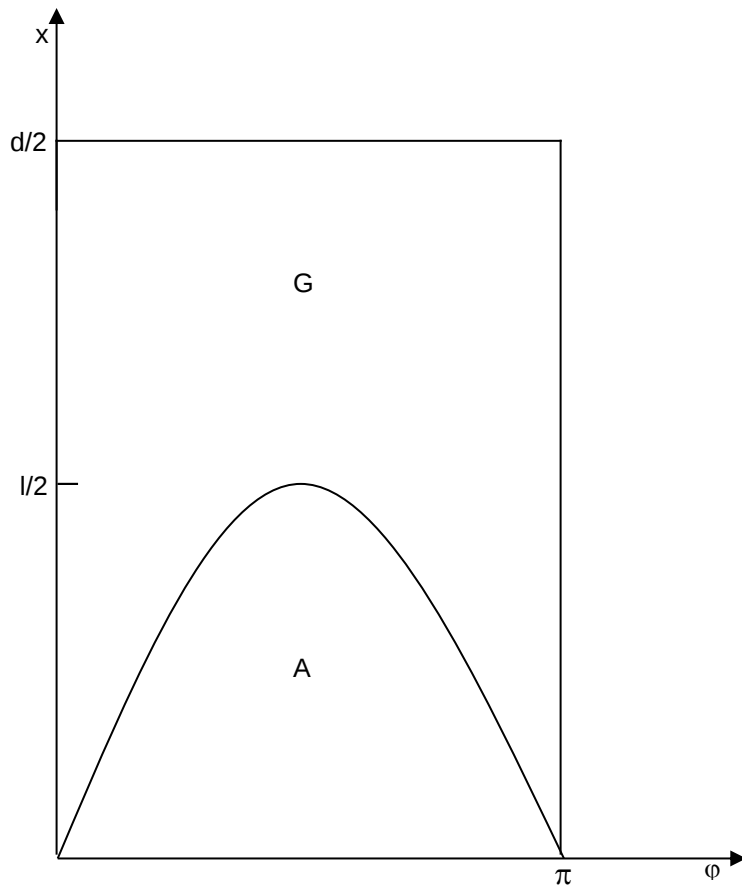
alternative Lösung:



x : Abstand des Mittelpunktes der Nadel zur am nächsten liegenden Geraden
 φ : Winkel, den die Nadel mit der Geraden einschließt

Für jedes Versuchsergebnis gilt: $0 \leq x \leq d/2$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$
 Alle möglichen Wertepaare (x, φ) liegen im Rechteck G.

Die Nadel schneidet eine Gerade, wenn gilt: $x \leq \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi$. Die Wertepaare (x, φ) , die einen Treffer kennzeichnen, liegen alle in der Fläche A (mit $\frac{l}{2} \cdot \sin \varphi$ als Grenzlinie).



Flächeninhalt der Fläche A:

$$F(A) = \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin(\varphi) d\varphi = \frac{l}{2} [-\cos(\varphi)]_0^{\pi} = \frac{l}{2} (-\cos(\pi) + \cos(0)) = l$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine Linie berührt oder schneidet, lässt sich aus dem Verhältnis der Flächen A und G berechnen:

$$p = \frac{F(A)}{F(G)} = \frac{l}{\pi \cdot d/2} = \frac{2l}{\pi d}$$

Alle Lösungen ohne Gewähr!!!