

Einführung in die Physikalische Chemie, Mathematische Methoden (B)

SS 14

Blatt 1

Aufgabe 1

Ergebnisse (mit je $P = \frac{1}{8}$, da $P(K) = P(Z) = \frac{1}{2}$):

KKK ZZZ
KKZ ZZK
KZZ ZKK
KZK ZKZ

a) $KKK, KKZ, KZZ, KZK \rightarrow P = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

b) $KKK, KKZ, ZZZ, ZZK \rightarrow P = \frac{1}{2}$

c) $KKZ, KZZ, ZZK, ZKK \rightarrow P = \frac{1}{2}$

d) $ZKK, ZZZ, KZZ, KKK \rightarrow P = \frac{1}{2}$

Aufgabe 2

100 Lose mit 70 Nieten

Niete, Niete: $P = \frac{70}{100} \cdot \frac{69}{99} = 0,488 = 48,8 \%$

→ alle anderen 3 Ereignisse = mind. 1 Gewinn:

$P(\text{mind. 1 Gewinn}) = 1 - 0,488 = 0,512 = 51,2 \%$

Zur Info:

Niete, Gewinn: $P = \frac{70}{100} \cdot \frac{30}{99} = 0,212$

Gewinn, Niete: $P = \frac{30}{100} \cdot \frac{70}{99} = 0,212$

Gewinn, Gewinn: $P = \frac{30}{100} \cdot \frac{29}{99} = 0,088$

$P(\text{mind. 1 Gewinn}) = 0,512 = 51,2 \%$

Aufgabe 3

a) aus Formelsammlung: $\int_0^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$

$$\int_0^{\infty} A v^2 e^{-b^2 v^2} dv = 1$$

$$A \frac{\sqrt{\pi}}{4b^{3/2}} = 1$$

$$A = \frac{4b^{3/2}}{\sqrt{\pi}} = 3 \cdot 10^8 \text{ s}^3/\text{m}^3$$

b)

Mitte des Intervalls: 470 m/s

$$f(v = 470 \text{ m/s}) = 3 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^3 \cdot 470^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \cdot \exp \left(-5,61 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2 \cdot 470^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) = 1,92 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}}$$

Intervallbreite Δv : 20 m/s

$$P(460 \text{ m/s} \leq v \leq 480 \text{ m/s}) = f(v = 470 \text{ m/s}) \cdot \Delta v = 1,92 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,0384$$

Die Wahrscheinlichkeit Stickstoff-Moleküle bei Zimmertemperatur mit einer Geschwindigkeit zwischen 460 und 480 m/s anzutreffen, beträgt also 3,8%.

c)

$$A \int_0^{480} v^2 \cdot \exp(-bv^2) dv - A \int_0^{460} v^2 \cdot \exp(-bv^2) dv = A (1,80043 - 1,67252) \cdot 10^7 \text{ m}^3/\text{s}^3 = 0,038373$$

Die Übereinstimmung ist sehr gut, da das Intervall klein genug gewählt ist.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass nur eine bestimmte Geschwindigkeit auftritt, ist 0.

Aufgabe 4

Chlor-35: natürliche Häufigkeit: 76 %, d.h. Wahrscheinlichkeit 0,76

Chlor-37: natürliche Häufigkeit: 24 %, d.h. Wahrscheinlichkeit 0,24

Betrachtung eines Chlormoleküls:

Mögliche Kombinationen:	Cl(35) – Cl(35)	$P \approx 0,5776$
	Cl(37) – Cl(35) bzw. Cl(35) – Cl(37)	$P \approx 0,3648$
	Cl(37) – Cl(37)	$P \approx 0,0576$

a) Verschiedene Fälle möglich: 3 Molekültypen: Cl(35/35), Cl(37/37), Cl(35/37)

Frage: Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten unter der Bedingung „genau ein Cl(37/37)“

Kombinationsmöglichkeiten für die 4 verbleibenden Moleküle:

- (1) 4 x Cl(35/35)
- (2) 4 x Cl(35/37)
- (3) 3 x Cl(35/35) + 1 x Cl(35/37)
- (4) 3 x Cl(35/37) + 1 x Cl(35/35)
- (5) 2 x Cl(35/35) + 2 x Cl(35/37)

Exemplarische Betrachtung anhand von (3):

Realisierungsmöglichkeiten für diesen Fall: 4

Hinzuziehen des einen Moleküls Cl(37/37):

für jeden der 4 Fälle gibt es 5 Möglichkeiten das Cl(37/37) zu positionieren, d.h. jeweils 5 Realisierungsmöglichkeiten.

Also gibt es insgesamt $4 \cdot 5 = 20$ Realisierungsmöglichkeiten.

Alternative Variante (deutlich schneller): Rechnen mit Fakultäten

$$\text{Zahl der Realisierungsmöglichkeiten: } \frac{5!}{3! \cdot 1!} = 20$$

Wahrscheinlichkeit für Auswahl 1 x Cl(37/37) + 3 x Cl(35/35) + 1 x Cl(35/37):

$$\begin{aligned} P &= P(\text{Cl}37/37) \cdot P(\text{Cl}35/37) \cdot (P(\text{Cl}35/35))^3 \\ &= 0,0576 \cdot 0,3648 \cdot 0,5776^3 = 4 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Gesamtwahrscheinlichkeit: $P_{\text{ges}(3)} = P_3 \cdot 20 = 0,081$

Analoges Vorgehen in den anderen Fällen ergibt:

$$(1) P_{ges(1)} = P(Cl37/37) \cdot (P(Cl35/35))^4 \cdot 5 = 0,0321$$

$$(2) P_{ges(2)} = P(Cl37/37) \cdot (P(Cl35/37))^4 \cdot 5 = 0,0051$$

$$(3) P_{ges(3)} = 0,0810 \quad (\text{siehe oben})$$

$$(4) P_{ges(4)} = P(Cl37/37) \cdot P(Cl35/35) \cdot (P(Cl35/37))^3 \cdot 20 = 0,0323$$

$$(5) P_{ges(5)} = P(Cl37/37) \cdot (P(Cl35/35))^2 \cdot (P(Cl35/37))^2 \cdot 30 = 0,0767$$

Daraus folgt als Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$P = P_{ges(1)} + P_{ges(2)} + P_{ges(3)} + P_{ges(4)} + P_{ges(5)} = 0,2272$$

Ergänzung: Die letzte Formel kann man wie folgt weiter vereinfachen

$$\begin{aligned} P &= P(Cl37/37) \cdot (P(Cl35/35))^4 \cdot 5 + P(Cl37/37) \cdot (P(Cl35/37))^4 \cdot 5 \\ &\quad + P(Cl37/37) \cdot P(Cl35/37) \cdot (P(Cl35/35))^3 \cdot 20 + P(Cl37/37) \cdot P(Cl35/35) \cdot (P(Cl35/37))^3 \cdot 20 \\ &\quad + P(Cl37/37) \cdot (P(Cl35/35))^2 \cdot (P(Cl35/37))^2 \cdot 30 \end{aligned}$$

Ausklammern ergibt:

$$\begin{aligned} P &= 5 \cdot P(Cl37/37) \cdot ((P(Cl35/35))^4 + 4 \cdot (P(Cl35/35))^3 \cdot P(Cl35/37) + 6 \cdot (P(Cl35/35))^2 \cdot (P(Cl35/37))^2 \\ &\quad + 4 \cdot P(Cl35/35) \cdot (P(Cl35/37))^3 + (P(Cl35/37))^4) \\ &= 5 \cdot P(Cl37/37) \cdot (P(Cl35/35) + P(Cl35/37))^4 \end{aligned}$$

b)

Einzig in Frage kommende Moleküle: Cl(35/37) und Cl(37/37)

Mögliche Kombinationen:

- 5 x Cl(35/37)
- 4 x Cl(35/37) + 1 x Cl(37/37)
- 3 x Cl(35/37) + 2 x Cl(37/37)
- 2 x Cl(35/37) + 3 x Cl(37/37)
- 1 x Cl(35/37) + 4 x Cl(37/37)
- 5 x Cl(37/37)

Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P &= \binom{5}{5} \cdot (P(Cl35/35))^5 + \binom{5}{4} \cdot (P(Cl35/37))^4 \cdot P(Cl37/37) + \binom{5}{3} \cdot (P(Cl35/37))^3 \cdot (P(Cl37/37))^2 \\ &\quad + \binom{5}{2} \cdot (P(Cl35/37))^2 \cdot (P(Cl37/37))^3 + \binom{5}{1} \cdot (P(Cl35/37))^1 \cdot (P(Cl37/37))^4 \\ &\quad + \binom{5}{0} \cdot (P(Cl35/37))^0 \cdot (P(Cl37/37))^5 \\ &= (P(Cl35/37) + P(Cl37/37))^5 \\ &= 0,0134 \end{aligned}$$

c) Wahrscheinlichkeit für 2 Chlor-37 Atome bei 4 betrachteten Chloratomen:

$$P = (0,24)^2 \cdot (0,76)^2 \approx 0,0333$$

Anzahl Realisierungsmöglichkeiten „genau zwei direkt benachbarte Chloratome“: 3

$$P = 3 \cdot 0,033 = 0,0999$$

Alle Lösungen ohne Gewähr!!!