

Einführung in die Physikalische Chemie, Mathematische Methoden (B)
SS 14

Blatt 13

Aufgabe 47

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c \cdot a_1 & c \cdot a_2 & c \cdot a_3 \end{vmatrix} = ca_1a_3b_2 + ca_1a_2b_3 + ca_2a_3b_1 - ca_1a_3b_2 - ca_1a_2b_3 - ca_2a_3b_1 = 0$$

Analog für zwei linear abhängige Spalten.

Aufgabe 48

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 24 \\ 1 & 4 & -3 & -6 \\ \hline 1 & 4 & -3 & -6 \\ 0 & -14 & 14 & 42 \\ 0 & -5 & 2 & 9 \\ \hline 1 & 4 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_1 = -4, x_2 = -1, x_3 = 2$$

homogener Fall: Da die Determinante der zum Problem gehörenden 3x3 Matrix ungleich null ist, existiert nur die Trivallösung. (Vgl. Vorlesung, Aufgabe 47)

Aufgabe 49

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Spalte 2 und Spalte 3 sind linear abhängig.

Daher ist die Determinante = 0. Im homogenen Fall folgt daraus unmittelbar, dass es eine nicht triviale Lösung geben muss!

2 Zeilen nur Nullen $\Rightarrow$ 2 frei wählbare Parameter (im Folgenden x_3, x_4)!

$$0 = 2x_2 + 2x_3 - x_4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-2x_3 + x_4}{2}$$

$$0 = x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{3x_4}{2}$$

Aufgabe 50

Die Eigenwerte von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ sind gesucht:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda)(-3-\lambda) - 14 + 0 + 10(4-\lambda) + 8(5-\lambda) - 0 \\ = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

zu lösendes charakteristisches Polynom: $0 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$

erste Nullstelle durch Raten: $\lambda_1 = 1$

Polynomdivision: $(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von **A**: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 3$

Eigenvektoren:

Betrachte:
$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ LGS:

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & -4 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ | :2 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ | (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ein Parameter frei wählbar:

$$x_3 = t$$

$$\Rightarrow 3x_2 = x_3 = t$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{t}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2x_3 - 4x_2 = 2t - \frac{4}{3}t = \frac{2}{3}t$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = t \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normierung: } |\vec{x}_1| = t \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{9}{9}} = t \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{t}{3} \sqrt{14} = 1$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$:
$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} = \frac{3t}{\sqrt{14}t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ LGS:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & -5 & 0 \end{array} \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ \\ | (-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 14 & -10 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & -24 & 15 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \begin{array}{l} + \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 14 & -10 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \end{array} \begin{array}{l} | :3 \\ \leftarrow \\ | :2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ein Parameter frei wählbar: $x_3 = s \quad \Rightarrow \quad 2x_2 = x_3 = s \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{s}{2}$

$$\Rightarrow \quad 3x_1 = 5x_3 - 7x_2 = 5s - \frac{7}{2}s = \frac{3}{2}s$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{s}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}_2 = s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung: $|\vec{x}_2| = s \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = s \frac{\sqrt{6}}{2} = 1$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$:
$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|} = \frac{2s}{\sqrt{6}s} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ LGS:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & -6 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ | :2 \\ | (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ein Parameter frei wählbar: $x_3 = u \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_3 = u$
 $\Rightarrow \quad x_1 = 3x_3 - 4x_2 = 3u - 4u = -u$

$$\Rightarrow \vec{x}_3 = u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung: $|\vec{x}_3| = u\sqrt{1+1+1} = u\sqrt{3} = 1$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$:
$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{x}_3}{|\vec{x}_3|} = \frac{u}{\sqrt{3}u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alle Lösungen ohne Gewähr!!!