Einführung in die Physikalische Chemie, Mathematische Methoden (B)
SS 14

Blatt 11

Aufgabe 36

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) nicht lösbar; unterschiedliche Dimension

c) $3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 37

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 6+2+5 = 13

b) $\vec{b} \cdot \vec{c}$ = -3+10 = 7

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 10 \\ 15 - 2 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{b}\times\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-5\\-1-0\\15+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-1\\17\end{pmatrix}$

e) $\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn das Skalarprodukt von $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$ und $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b}$ 0 sind:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-9\\13\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}=-18+13+5=0$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}-9\\13\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=-27+26+1=0$$

Aufgabe 38

Betrag eines Vektors: $|\vec{a}|=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}$

a) $|\vec{v}|=\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}$

b) $|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2}$

Aufgabe 39

Skalarprodukt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ und somit: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3-2+2=-3$ $|\vec{a}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$ $|\vec{b}|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$

Einsetzen:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} \approx -0{,}327 \qquad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(-0{,}327\right) = 109{,}1°$$

Aufgabe 40

lineare Unabhängigkeit:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0} \text{ nur für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d.h. $\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$

zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \qquad + \lambda_3 &= 0 \qquad \text{(I)} \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \qquad \text{(II)} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

aus (II) $\qquad \lambda_2 = \lambda_3$

mit (I) $\qquad -2\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_2$

in (III) $\qquad 0 = \lambda_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_1 = -3\lambda_1 \qquad \Rightarrow \lambda_1 = 0$

aus (I) folgt somit auch $\lambda_2 = 0$ und damit auch $\lambda_3 = 0$ (nach (III)).

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind somit linear unabhängig.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d.h. $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \qquad \text{(I)} \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \qquad \text{(II)} \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \qquad &= 0 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

	$\lambda_1 = \lambda_2$	(III)
in (I)	$\lambda_1 = -\lambda_3$	(I)

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3$ löst somit das Gleichungssystem. Die Vektoren sind linear abhängig.

Aufgabe 41

a)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \frac{d}{dt}\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)$$

$$= \dot{a}_1 b_1 + a_1 \dot{b}_1 + \dot{a}_2 b_2 + a_2 \dot{b}_2 + \dot{a}_3 b_3 + a_3 \dot{b}_3$$

$$= \vec{a}\frac{d}{dt}\vec{b} + \vec{b}\frac{d}{dt}\vec{a}$$

b)

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 & - & a_3 b_2 \\ a_3 b_1 & - & a_1 b_3 \\ a_1 b_2 & - & a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} \dot{a}_2 b_3 + a_2 \dot{b}_3 - \dot{a}_3 b_2 - a_3 \dot{b}_2 \\ \dot{a}_3 b_1 + a_3 \dot{b}_1 - \dot{a}_1 b_3 - a_1 \dot{b}_3 \\ \dot{a}_1 b_2 + a_1 \dot{b}_2 - \dot{a}_2 b_1 - a_2 \dot{b}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{a}_2 b_3 - \dot{a}_3 b_2 \\ \dot{a}_3 b_1 - \dot{a}_1 b_3 \\ \dot{a}_1 b_2 - \dot{a}_2 b_1 \end{pmatrix}}_{\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 \dot{b}_3 - a_3 \dot{b}_2 \\ a_3 \dot{b}_1 - a_1 \dot{b}_3 \\ a_1 \dot{b}_2 - a_2 \dot{b}_1 \end{pmatrix}}_{\frac{d\vec{b}}{dt}\times\vec{a}}$$

$$= \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \frac{d\vec{b}}{dt}\times\vec{a}$$

c)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\frac{d\vec{a}}{dt}\right) = \underbrace{\frac{d\vec{a}}{dt}\times\frac{d\vec{a}}{dt}}_{=0} + \vec{a}\times\frac{d^2\vec{a}}{dt^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\frac{d\vec{a}}{dt}\right) = \vec{a}\times\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}$$

Alle Lösungen ohne Gewähr!!!