2.6.4. Überlagerung/Linearkombination von Eigenfunktionen

Annahme: System befindet sich in einem Zustand, der durch eine Wellenfunktion ψ_n beschrieben werden kann, die Eigenfunktion zum Operator $\hat{A}$ ist (Eigenzustand).

Frage: Welcher Erwartungswert ergibt sich bei einer Serie von Messungen der Observablen a?

$$\langle a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \hat{A} \psi_n dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* a_n \psi_n dx = a_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx = \underline{\underline{a_n}}$$

Antwort: Es ist der zugehörige Eigenwert.

Frage: Ist System immer in Eigenzustand?

Antwort: Nein, aber:

Jede Wellenfunktion $\phi(x)$, die denselben Randbedingungen wie die ψ_k gehorcht, kann als Linearkombination

$$\phi(x) = \sum_k c_k \psi_k(x)$$

ausgedrückt (man sagt „nach den ψ_k entwickelt") werden;
c_k: Entwicklungskoeffizienten (komplexe Zahlen)
$\Rightarrow$ Eigenfunktionen bilden vollständigen Satz.
(Vollständigkeit heißt, dass jede entsprechende Wellenfunktion entwickelt werden kann.)

Woher bekommt man die c_k?

$$\phi(x) = \sum_k c_k \psi_k(x)$$

Jetzt Multiplikation von links mit $\psi_l{}^*(x)$ und Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_l^*(x)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l^*(x) \sum_k c_k \psi_k(x)dx$$

$$= \sum_{k \neq l} c_k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_l^*(x)\psi_k(x)dx}_{0} + c_l \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_l^*(x)\psi_l(x)dx}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_k = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l^*(x)\phi(x)dx}$$

Erwartungswert

$$\langle a\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\hat{A}\phi(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_l c_l^* \psi_l^* \hat{A} \sum_k c_k \psi_k dx$$

$$= \sum_l \sum_k c_l^* c_k \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l^* \hat{A} \psi_k dx$$

$$= \sum_l \sum_k c_l^* c_k a_k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_l^* \psi_k dx}_{\substack{0 \text{ für } l \neq k \\ 1 \text{ für } l = k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle a\rangle = \sum_l c_l^* c_l a_l = \sum_l |c_l|^2 a_l}$$

Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\phi(x)dx = 1 \qquad \text{d.h. formal } \hat{A} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_l c_l^* c_l = \sum_l |c_l|^2 = 1}$$

→ $|c_l|^2$ ist Wahrscheinlichkeit des Auftretens von a_l bei Messungen von a am System im Zustand ϕ.