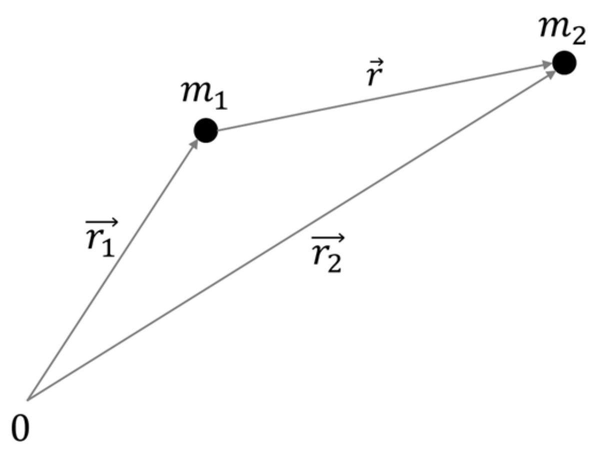
Prof. Dr. M. Olzmann
Johannes Kiecherer, Isabelle Weber
Institut für Physikalische Chemie

Einführung in die Physikalische Chemie, Mathematische Methoden (B) SS14

Blatt 6

Aufgabe 21

Man betrachte 2 Massenpunkte, die über ein Potential $V(\vec{r})$ miteinander wechselwirken. (Siehe Skizze!)



Es ist offensichtlich, dass die kinetische Energie $T(\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2)$ des Systems durch den folgenden Ausdruck

$$T(\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2}$$

gegeben ist.

a) Bestimmen Sie nun die kinetische Energie und die Lagrange-Funktion L des Systems in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ und der Geschwindigkeit $\dot{\vec{R}}$ des Schwerpunktes. (*Hinweis*: Berechnen Sie zunächst die Koordinaten des Schwerpunktes und transformieren Sie anschließend $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ nach $\vec{r}, \vec{R}$.)

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems (*Hinweis*: Lagrange-Gleichung) unter Berücksichtigung folgender Annahmen:

- Keine Bewegung des Schwerpunktes ⇒ $\boxed{\dot{\vec{R}} = 0}$.
- Potential ist nur vom Betrag r des Ortsvektors $\vec{r}$ abhängig

  ⇒ $\boxed{V = V(r) = \frac{1}{2} k r^2}$ (Harmonisches Potential)

- Das System hat keinen Drehimpuls ⇒ $\boxed{\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2}$

Welche molekularen Systeme lassen sich durch die resultierende Bewegungsgleichung beschreiben? Nennen Sie hierzu ein Beispiel!

Aufgabe 22

Eine Masse m sei an einem Faden konstanter Länge l aufgehängt. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung des Pendels durch $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0$ gegeben ist, wobei φ den Winkel zwischen der momentanen Position und der Ruhelage des Fadens bezeichnet. g ist die Erdbeschleunigung.

Benutzen Sie dazu:

a) die Langrange-Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ mit $L(\varphi, \dot{\varphi}) = T(\dot{\varphi}) - V(\varphi)$. Drücken Sie also die kinetische Energie T und die potentielle Energie V als Funktionen von $\dot{\varphi}$ bzw. φ aus.

b) die Hamilton-Gleichungen $\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dot{\varphi}$ und $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dot{p}_\varphi$ mit $H(\varphi, p_\varphi) = T(p_\varphi) + V(\varphi)$, wobei der verallgemeinerter Impuls $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$. Drücken Sie entsprechend H als Funktion von φ und p_φ aus.

Versuchen Sie, eine Lösung der Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen zu finden (Randbedingungen: $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = v_0$).

Skizzieren Sie die Trajektorie der Masse m im Phasenraum.