

5.2.2. Allgemeines Kurvenintegral und totales Differential

Allgemeines Kurvenintegral für beliebige Funktionen $P(x,y)$ und $Q(x,y)$:

$$I(K) = \int_K [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]$$

Häufige Fragestellung in Physik/Chemie: Unter welchen Bedingungen ist I unabhängig vom Integrationsweg K , man sagt kurz wegunabhängig?

Angenommen, es existiere Funktion $f(x,y)$; dann kann man das totale Differential aufschreiben (siehe Kap. 4.3):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Beliebiger Integrationsweg: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t = t_A \dots t_B$

Aus der Kettenregel folgt dann:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt \\ &= \frac{df}{dt} dt \\ \Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} df &= f[x(t_B), y(t_B)] - f[x(t_A), y(t_A)] \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Integral über totales Differential enthält lediglich Differenz Endpunkt minus Anfangspunkt, d.h., es ist wegunabhängig.

$\Rightarrow$ für allgemeine Funktionen $P(x,y)$ und $Q(x,y)$ gilt das offenbar, wenn

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Wie kann man das überprüfen?

Satz von Schwarz (Kap. 4.2):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$\Rightarrow P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ist totales Differential, wenn

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \quad (\text{Integrabilitätsbedingung})$$

Falls I wegunabhängig, dann für geschlossenen Weg (Anfangspunkt = Endpunkt):

$$\oint [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = 0 \quad \text{„Kreisintegral“} = 0$$

Dieser Sachverhalt spielt eine große Rolle für Zustandsfunktionen in der Thermodynamik und Potentiale ganz allgemein in der Physik/Chemie.